

MODUL 1 INTEGRAL

TUJUAN

Setelah mempelajari bab ini, peserta didik diharapkan mampu menjelaskan arti integral tak tentu, menurunkan sifat-sifat integral tak tentu dari turunan, menentukan integral tak tentu dari fungsi aljabar, menjelaskan arti integral tentu, menentukan integral tentu dengan menggunakan sifat-sifat integral dan menggunakan integral untuk menghitung luas daerah dibawah kurva.

A. PENGERTIAN INTEGRAL

Integral adalah anti diferensial / anti turunan. Jika $f(x)$ adalah turunan dari $F(x)$, yaitu $F'(x) = f(x)$, berlaku :

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

Dengan c konstanta dan $f(x)$ disebut integran.

B. INTEGRAL TAK TENTU

Misalkan a konstanta real sembarang, $f(x)$ dan $g(x)$ masing-masing merupakan fungsi integral yang dapat ditentukan fungsi integral umumnya, maka :

1. Rumus-rumus Integral fungsi aljabar

a. $\int a dx = ax + c$

b. $\int a x^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$

c. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

2. Sifat-sifat Integral

a. $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

b. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Contoh 1 :

Tentukan hasil dari :

1. $\int 4 dx$

2. $\int dx$

3. $\int (6x + 2) dx$

4. $\int (4x^3 - 3x^2 + 5x + 3) dx =$

Jawab :

1. $\int 4 dx = 4x + c$

2. $\int dx = x + c$

3. $\int (6x + 2) dx$
 $= \frac{6}{1+1} x^{1+1} + 2x + c$
 $= 3x^2 + 2x + c$

4. $\int (4x^3 - 3x^2 + 5x) dx$
 $= \frac{4}{3+1} x^{3+1} - \frac{3}{2+1} x^{2+1} + \frac{5}{2} x^2 + 3x + c$
 $= x^4 - x^3 + \frac{5}{2} x^2 + 3x + c$

Contoh 2 :

Tentukan hasil dari :

1. $\int (x - 4)^2 dx$

2. $\int \frac{x^2 + 2x^3 - x}{x^5} dx$

3. $\int 2\sqrt{x} dx$

4. $\int x^2 \sqrt{x} dx$

Jawab :

1. $\int (x - 4)^2 dx$
 $= \int (x^2 - 8x + 16) dx$
 $= \frac{1}{3} x^3 - 4x^2 + 16x + c$

3. $\int 2\sqrt{x} dx$
 $= \int 2x^{\frac{1}{2}} dx$

$$\begin{aligned}
2. \int \frac{x^2+2x^3-x}{x^5} dx &= \int \left(\frac{x^2}{x^5} + \frac{2x^3}{x^5} - \frac{x}{x^5} \right) dx \\
&= \int (x^{-3} + 2x^{-2} - x^{-4}) dx \\
&= \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + \frac{2}{-2+1} x^{-2+1} - \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + c \\
&= -\frac{1}{2} x^{-2} - 2x^{-1} + \frac{1}{3} x^{-3} + c \\
&= \frac{-1}{2x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{3x^3} + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + c \\
&= \frac{4}{3} x \sqrt{x} + c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \int x^2 \sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{5}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\frac{5}{2}+1} x^{\frac{5}{2}+1} + c \\
&= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x} + c
\end{aligned}$$

Contoh 3 :

Diketahui $F'(x) = 4x - 1$ dan $F(3) = 20$, tentukan fungsi $f(x)$!

Jawab :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int F'(x) dx \\
&= \int (4x - 1) dx = 2x^2 - x + c \\
F(3) &= 2(3)^2 - 3 + c \\
20 &= 15 + c \\
c &= 5
\end{aligned}$$

Jadi $F(x) = 2x^2 - x + 5$

LATIHAN 1

Tentukan hasil dari integral berikut :

1. $\int -3 dx$
2. $\int \frac{dx}{5}$
3. $\int -8x^7 dx$
4. $\int x dx$
5. $\int -6t^{-7} dt$
6. $\int \frac{4 dx}{x^5}$
7. $\int 3x^{\frac{1}{2}} dx$
8. $\int \sqrt[3]{u^2} du$
9. $\int \frac{3}{\sqrt{h}} dh$
10. $\int 7x \sqrt[3]{x} dx$

LATIHAN 2

Selesaikan soal berikut :

1. $\int (2x - 3) dx$
2. $\int (3x^2 + 6x - 1) dx$
3. $\int (4x^3 - 12x^2 - x + 2) dx$
4. $\int (x - 2)(x + 2) dx$
5. $\int 6x(x - 1) dx$
6. $\int \frac{x^4 + x^2}{x} dx$
7. $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x}} dx$
8. Tentukan fungsi $f(x)$ jika diketahui $f'(x) = x^2 + 4x$ dan $f(-3) = 5$!
9. Tentukan fungsi $g(x)$ jika $g''(x) = 12x$, $g'(-1) = 5$ dan $g(1) = 3$
10. Diketahui gradient garis singgung sebuah kurva pada setiap titik (x,y) dinyatakan dengan $\frac{\partial y}{\partial x} = 3x^2 - 6x + 1$. Jika kurva tersebut melalui $(2, -3)$, tentukan persamaan kurva tersebut !